Ejercicios de Matemáticas I - Relación 4

1. Estudia la continuidad de la función $f:[0,4]\to\mathbb{R}$ dada por $f(1)=1/4$ y:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-1|}{(x^2-1)E(1+x)} & \text{si } x\in[0,1[\cup]1,2]\\ E(x)-7/4 & \text{si } x\in]2,4]\end{cases}\qquad \big(E(x) \text{ es la parte entera de } x\big)$$

2. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Supongamos que $a\leqslant f(x)\leqslant b$ para todo x en $[a,b]$. Prueba que hay algún punto $c\in[a,b]$ tal que $f(c)=c$.

3. Sea $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ para todo $x\in[-1,1]$. Prueba que hay algún $c\in[-1,1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c)=\dfrac{1}{4}(c^3+3c)$.

4. Prueba que la ecuación $x+\mathrm{e}^x+\operatorname{arc\,tg} x=0$ tiene una sola solución real. Da un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha solución.

5. Suponiendo que la temperatura varía de forma continua, prueba que hay puntos antípodas en el ecuador terrestre que están a la misma temperatura.

6. Un automovilista sale de Granada hacia Madrid un sábado a las 8h de la mañana y el domingo inicia el regreso a la misma hora. Sabiendo que invirtió igual tiempo en ambos viajes, prueba que en algún momento del domingo el automovilista se encuentra a igual distancia de Granada que a la que se encontraba el sábado en ese mismo momento.

7. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a\leqslant b$ para todo $a\in A$ y para todo $b\in B$. Prueba que $\sup A\leqslant \inf B$.

8. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Justifica las siguientes afirmaciones:

   i) Si $A\subseteq B$ entonces $\sup(A)\leqslant\sup(B)$, $\inf(A)\geqslant\inf(B)$.

   ii) $\sup(A\cup B)=\max\{\sup(A),\sup(B)\}$.

9. Sea $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente. Sean $\alpha=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\beta=\lim\limits_{x\to b} f(x)$. Prueba que $f(]a,b[)=]\alpha,\beta[$.

   Se supone que $-\infty\leqslant\alpha<\beta\leqslant+\infty$. Considera todos los casos posibles.

10. Sean A y B conjuntos no vacíos y acotados de números reales y definamos el conjunto

$$C=\{a-b:\ a\in A,\ b\in B\}$$

   Prueba que $\sup(C)=\sup(A)-\inf(B)$ y $\inf(C)=\inf(A)-\sup(B)$.

11. Sea $f:]0,1[\to\mathbb{R}$ la función dada para $x\in]0,1[$ por:

$$f(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{x(x-1)}.$$

   Prueba que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ y que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$. Deduce que la imagen de f es todo $\mathbb{R}$.

12. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(0)=0$ y $f(x)=\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(1/x)$, para todo $x\neq 0$. Estudia la continuidad de f y la existencia de límites en $+\infty$ y en $-\infty$.